УДК 681.5.01

**Применение тензорных форм представления сигналов при построении систем автоматического управления положением объекта в пространстве.**

© Сорокин Н.Ф.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Исследованы вопросы использования векторно-тензорных сигналов при построении систем автоматического регулирования, оперирующих в трехмерном и двумерном пространствах. Введение тензорных сигналов позволяет строить систему управления в наиболее физически обоснованном виде без ограничений на пространство возможных режимов. Использование тензоров положения для замыкания обратной связи позволяет решать задачи пространственного позиционирования методами ТАУ, в том числе методом структурных схем. В работе показано, что особенности работы с тензорными сигналами в условиях относительного вращения систем координат могут быть учтены в структурной схеме в виде переменного матричного коэффициента усиления. На основании выкладок делается вывод о принадлежности исследуемого класса систем к классу хорошо линеаризуемых многомерных систем автоматического управления.*

***Ключевые слова****: многомерные системы, система автоматического управления, дроны, тензорные сигналы.*

**Введение. Преимущества тензорных сигналов.** Известно, что системы управления работающие в условиях многомерного пространства имеют большое количество перекрёстных связей между каналами управления. Это объясняется тем, что органы управления таких систем обычно связаны с самим объектом управления и эффект оказываемый ими на параметры объекта управления зависит от его текущего состояния. Простое решение этой проблемы состоит в ограничении множества рассматриваемых рабочих состояний системы. Однако, синтез управления на основе уравнений движения, линеаризованных в ограниченном множестве опорных режимов, приводит к тому, что поведение системы зависит от выбранных скалярных каналов управления и не полностью реализует возможности технического изделия.

Синтез управления в терминах тензоров более естественен для систем работающих в пространстве, поскольку пространственные физические явления математически описываются в тензорной форме и имеют в этом виде наиболее компактную запись. Переходя к синтезу управления в терминах тензоров мы получаем управление физически обоснованное, независимое от выбора расчетной системы координат и других допущений, а также хорошо подходящее для реализации в програмном коде в рамках объектного подхода.

Отдельно стоит отметить, что использование векторных моторов [1] и прочих параметров, объединяющих линейные и угловые параметры общей физической природы уменьшает количество перекрестных связей в системе, поскольку эти компоненты часто оказываются взаимозависимыми при переходах между системами координат, а потому имеет смысл в качестве тензорных сигналов пространственных САУ (система автоматического управления) использовать именно такие, объединенные пары угловых и линейных параметров. Уравнения движения объектов в моторах имеют достаточно простой вид и могут легко анализироваться.

**Краткий обзор современного состояния проблематики.** Анализ последних статей показывает, что на текущий момент существует две большие практически несвязанные ветви исследований посвященные системам управления свободно движущихся в пространстве объектов, соответствующие двум промышленно значимым классам соответствующих технических изделий.

Первая ветвь касается систем управления многозвенными роботами-манипуляторами, позиционерами, а также шагающими роботами. Работы по данному направлению часто отталкиваются от решения задач обратной кинематики и обратной динамики управляемых механизмов [2], [3]. В последнее время наметились тенденции по внедрению нейросетевых методов [4].

Вторая ветвь относится к управлению летательными и прочими свободно движущимися аппратами, дронами. Здесь многие работы, например [5], [6], [7] посвящены управлению в терминах тензорных компонент, в частности выраженных кватернионами и дуальными кватернионами, что перекликается с темой этой статьи.

В рамках настоящей работы и последующих статей эти классы задач будут рассмотрены в рамках единого подхода тензорных регуляторов. При этом в работе не конкретизируется форма представления тензоров, в частности кватернионная, матричная или прочая. Вопрос выбора конкретной формы сигнала считается вопросом оптимизации вычислений и не влияет на динамические свойства системы.

**Требования к объектам управления.** Формализм тензорных сигналов удобен для построения систем автоматического управления объектами совершающими сложные движения в условиях изотропного пространства, мерность которого выше единицы.

К таким объектам относятся роботы-манипуляторы, дроны, некоторые виды автомашин, шагающие роботы.

Хотя задачи, решаемые этими и другими группу ОУ, осуществляющими пространственные движения, могут существенно отличаться, само по себе управление положением и сопутствующими параметрами имеет общую математическую природу требующую общего описания.

**Особенности применения и обработки тензорных сигналов.** Тензорным сигналом будем называть изменяющуюся во времени геометрическую сущность, независимую от выбора системы координат, и однозначно представленную набором или эквивалентными наборами своих компонент.

Особенностью тензорного сигнала является множественность его возможных представлений вплоть до того, что в различных частях системы управления один и тот же тензорный сигнал может быть представлен различными способами. Так например, тензор угловой ориентации может быть представлен матрицей поворота, кватернионом или вектором наименьшего поворота и при этом эти формы могут быть заданы в различных базисах. Выбор компонентного представления в вычислительной системе не влияет на динамические свойства системы, поскольку операции над тензорами эквивалентны во всех системах координат.

**Тензор ориентации, тензор положения и их производные в цепи обратной связи.** Тензор ориентации (или тензор поворота) является наиболее общим способом описания углового положения объекта или системы координат. Тензор ориентации является тензором второго ранга и представлен матрицей поворота. Эквивалентной формой представления тензора ориентации являются вектор конечного поворота и кватернион ориентации. Связь между вектором конечного поворота и матрицей поворота определяется следующим образом [8]:

(1)

(2)

Тензор положения является тензором второго ранга и представляет собой тензор поворота расширенный тензором(вектором) трансляции. Тензор положения может быть представлен матрицей 4x4 следующим образом ([10]):

(3)

, где *R* - 3x3 матрица поворота, *r* - 3x1 вектор трансляции, *0* - 1x3 нулевой вектор, *1* - 1x1 скаляр. Альтернативным вариантом представления тензора положения является дуальный кватернион или пара тензора ориентации и вектора трансляции. Операции над этими объектами исследуются, например в [9], [10].

Для построения САР (системы автоматического регулирования) нам потребуется ввести сигнал ошибки положения объекта. Пусть *U* - тензор уставки положения, а *X* - тензор текущего положения. Введем два типа невязок.

Аддитивная невязка *D*:

(4)

Мультипликативная невязка *E*:

(5)

(6)

Рассмотрим, как аддитивная невязка связана с мультипликативной.

Подставив (6) в (5) получим:

(7)

(8)

, где *I –* единичная матрица.

Матрица *E - I* имеет вид:

(9)

Поскольку следящие системы управления предназначены для работы в условиях малых невязок, будем считать что и отбросим члены порядок малости которых меньше единицы.

(10)

(11)

(12)

, где *r* и - вектор трансляции и вектор поворота тензора *E* соответственно.

Таким образом, в условиях малости невязки:

(13)

Угловая компонента представляет из себя антисимметричный тензор и может быть эквивалентно представлена сопряженным вектором, который является вектором поворота мультипликативной невязки . Теперь тензор *D* может быть представлен в эквивалентной векторном виде:

(14)

Продифференцируем аддитивную невязку по времени в инерциальной системе координат:

(15)

В работе [8] показано, что производная тензора поворота может быть представлена в следующей форме

(16)

, где *P* - тензор ориентации, *S* - правый тензор спина.

Тогда

(17)

Приняв во внимание, что антисимметричный тензор правого спина может быть эквивалентно представлен вектором правой угловой скорости ([8]), приведём уравнения к эквивалентному векторному виду:

(18)

Обратим также внимание, что если рассматривать невязки , в собственной или близкой к ней системах координат, то и сигналы невязок получают вид:

(19)

(20)

Выбор векторных форм невязок позволяет при расчете управления избавиться от матриц с целью снижения размерности задачи. Необходимо помнить, что переход к векторной форме корректен только при малой угловой ошибке.

Из приведённых выкладок видно, что сигнал мультипликативной невязки может использоваться для восстановления аддитивной невязки. В дальнейшем аддитивная невязка будет использована для замыкания системы управления в качестве сигнала ошибки. Выбор аддитивной невязки для построения системы стабилизации объясняется её линейностью.

**Вращения тензорных сигналов и переменных состояния.** Прежде чем перейти непосредственно к построению замкнутой системы, исследуем одну из принципиальных нелинейностей этого класса систем управления.

Поскольку часть сигналов, из числа тех, что должны анализироваться САУ задано в базовой системе координат, а часть в собственной, оказывается, что переменные состояния по разному реагируют на изменение углового положения объекта управления.

Если сравнить поведение вектора силы тяжести и вектора тяги летательного аппарата, то окажется, что в базовой системе координат вектор силы тяжести неподвижен, а вектор силы тяги вращается вместе с собственной системой координат. Если же мы рассмотрим эти же вектора в собственной системе координат, то вектор силы тяги будет неподвижен, а вектор силы тяжести будет вращаться обратно вращению собственной системы координат.

Фактически, если принять во внимание, что точно так же, в зависимости от принадлежности к родительской системе координат себя ведут все переменные состояния, включая даже те, что не являются физическими величинами, а существуют только в памяти вычислителя, можно сказать, что САУ включает в себя несколько вращающихся/перемещающихся друг относительно друга сигнальных доменов.

В общем случае таких сигнальных доменов может быть больше двух, но мы ограничимся рассмотрением доменов опорной (неподвижной) и собственной (подвижной) систем координат.

Поскольку САУ работает с переменными обоих доменов, некоторые сигналы приходится переводить в неродную систему координат. Это означает, что в точке пересечения границы домена сигнал домножается на переменный матричный коэффициент, численно равный матрице относительного поворота входной и выходной систем координат. зависит от переменных фазового пространства состояний.

Если векторный сигнал пересекает границу домена , то в домене сигнал будет иметь вид:

(21)

Исследуем производную сигнала:

(22)

Поскольку тензор правого спина кососимметричен и его умножение на сигнал справа равно векторному произведению правой угловой скорости, получаем

(23)

Из анализа первого слагаемого видим, что при наличии относительной угловой скорости между доменами, переменный коэффициент поворота приводит к возникновению нелинейного канала ротационного движения между компонентами тензорного сигнала. При этом, учитывая свойства векторного произведения, эффект этот тем меньше, чем ближе направления векторного сигнала и направление вектора правой угловой скорости относительного вращения доменов.

Рассмотрим управляемый преобразователь сигнала , находящейся в системе управления на границе домена.

(24)

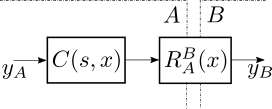


Рис.1 Контроллер на границе сигнальных доменов.

Поскольку мы можем выбирать функцию , зададим в виде

(25)

, где выбирается согласно прочим условиям. Тогда:

(26)

Отсюда следует, что управляемый оператор на границе доменов позволяет убрать нелинейность системы управления, связанную с переходом сигнала через границу домена. Аналогично можно показать, что управляемый преобразователь сигнала способен компенсировать эффект не только этого, но и прочих переменных коэффициентов усиления и их композиций, в случае, когда они примыкают к нему в структурной схеме.

**Замкнутая система и её устойчивость.** Пусть структурная схема САР (системы автоматического регулирования) дана в следующем виде (рис.2).



Рис.2. Пример системы автоматического регулирования с сигнальными доменами.

Здесь:

- домен опорной системы координат.

- домен связанной системы координат.

- тензор уставки положения.

- тензор текущего положения (численно равен S).

- аддитивная невязка в векторном виде.

- контроллер САР.

- тензоры поворота систем координат.

- коэффициент усиления и передаточная функция органов управления.

- передаточная функция объекта управления.

Наложим на опорную систему условие неподвижности. В качестве опорной системы может быть выбрана любая инерциальная система, например базовая система координат, связанная с землёй.

Сумматор в левой части схемы, вычисляющий сигнал ошибки управления в виде аддитивной невязки получает на вход тензоры положения в полном виде и будет работать по формулам рассмотренным выше (12, 14). В общем случае операция выполняемая этим элементом не является суммированием, хотя и проявляет соответствующие свойства при анализе устойчивости, как мы увидем в дальнейшем. Знак сумматора использован для преемственности с классическими структурными схемами ТАУ.

Замкнутый контур системы включает в себя 2 точки перехода сквозь границу сигнальных доменов.

Выделим в подцепочке домена S прямой канал (рис.3):

(27)

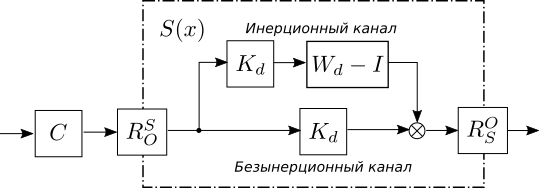


Рис.3. Выделение безынерционного канала в связанном домене.

Теперь задав функцию управляемого преобразователя аналогично (25), компенсируем нелинейность безынерционного канала:

(28)

При таком управлении, эквивалентная схема участка цепи будет выглядеть так:



Рис.4 Эквивалентная схема цепи связанного   
домена с линейным каналом.

Эта форма управления привела к тому, что замкнутый контур САР разделился на линейную и нелинейную части.

Можно показать, что для физически реализуемых систем функция стремится к нулю при . Таким образом нелинейная составляющая сигнала проявляет себя ограниченный период времени после эволюции системы. Нелинейный эффект связан с переходным процессом органов управления, а длительность эффекта определяется постоянной времени передаточной функции .

Несложно заметить, что расположение контроллера управления слева или справа от границы домена весьма условно. На практике функция контроллера может быть достаточно сложной, и сочетать компоненты, работающие как в собственной, так и в опорной системах координат.

Для анализа устойчивости системы выберем другую опорную систему координат и связанный с ней тензор положения *Q*, таким образом, чтобы в системе *Q* тензор *X* (а соответственно тензор собственной системы координат *S* и тензор уставки *U*) оказались малыми и могли быть эквивалентно представлены в векторном виде. Такой выбор *Q* будет соответствовать линеаризации САР в этом режиме.

(29)

(30)

Рассмотрим случай, когда динамикой возможно пренебречь. Такое допущение уместно, когда постоянные времени органов управления, меньше постоянных времени регулятора . В этом случае обращается в единичный коэффициент усиления и инерционный канал можно отбросить.

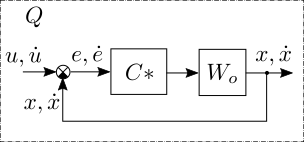


Рис. 5 Эквивалентная линеаризованная схема системы.

Если и линейны, такая система относится к классу многомерных линейных систем. Методы анализа устойчивости таких САР проработаны [11].

Предположим, что мы доказали устойчивость этой системы. Очевидно, что, при работе во всём диапазоне возможных положений, с течением времени система покинет область линеаризации выбранного режима. Однако существует бесконечное множество опорных систем *Q* и передаточные функции линеаризованной системы будут эквивалентны во всех, а значит, если доказать устойчивость в одном опорном режиме, будет автоматически доказана устойчивость во всех опорных режимах.

Хотя в общем случае, доказательство устойчивости на непрерывном множестве опорных режимов не является доказательством того, что переходный процесс когда-либо завершится, можно предположить, что квазилинейный сферический характер зависимости переменных состояния тензоров положения налагает менее серьёзные ограничения и система будет ожидаемо себя вести во всём диапазоне возможных состояний положений и скоростей.

В качестве опорной системы *Q* удобно в каждый момент времени рассматривать мгновенную неподвижную систему координат, тензор положения которой численно совпадает с тензором собственной системы координат. Хотя такая система будет непрерывно перемещаться, мы всегда можем утверждать, что данная опорная система существовала за какое-то время до и будет существовать какое-то время после, а значит анализ устойчивости, не имеющий очевидного смысла для мгновенной системы, в такой системе всё равно имеет силу.

Следует отметить, что тензорная природа сигналов позволяет не переходить для расчётов в опорную систему, относительно которой доказана линейность, поскольку операции над тензорами эквивалентны во всех системах. Это позволяет достаточно вольно обращаться с координатными системами, каждый раз выбирая те из них, в которых вычисление выглядит наиболее геометрически обусловленным или оптимальным по быстродействию.

**Направление дальнейших исследований.** В этой статье рассматривалось абстрактное управляющее тензорное воздействие. На практике редко встречаются органы управления, способные к генерации векторных и тензорных управляющих воздействий. Для решения этой задачи в инженерной практике применяют комбинации отдельных групп органов управления, в совокупности генерирующих желаемое векторное воздействие. В будущих статьях, планируется рассмотреть вопрос учёта таких групп в исследуемом классе систем и перейти к исследованию частных случаев применения рассматриваемого подхода.

**Вывод.** Проведенный анализ показывает, что принципиальных проблем для использования тензорных сигналов в системах автоматического управления нет, причем такие системы являются частным случаем более общего класса многомерных систем управления и достаточно хорошо поддаются линеаризации. Нелинейные эффекты, возникающие в системе сводятся к эффектам накладываемым переменными матричными коэффициентами.

Приведенные выкладки не опираются на физические особенности какой-либо конкретной группы объектов управления, а потому могут быть применены к широкому классу систем.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Диментберг Ф. М. Винтовое исчисление и его приложения к механике. М.:Наука, 1965, 200 с.

[2] P. Ganin, V. Moskvin and A. Kobrin, "Redundant industrial manipulator control system," 2017 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*,* St. Petersburg, 2017, pp. 1-6.

[3] A. Gregg-Smith and W. W. Mayol-Cuevas, "Inverse kinematics and design of a novel 6-DoF handheld robot arm," 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Stockholm, 2016, pp. 2102-2109.

[4] Z. Bingul, H. M. Ertunc and C. Oysu, "Comparison of inverse kinematics solutions using neural network for 6R robot manipulator with offset," 2005 ICSC Congress on Computational Intelligence Methods and Applications, Istanbul, 2005, pp. 5 pp.-.

[5] T. P. Reynolds and M. Mesbahi, "Coupled 6-DOF Control for Distributed Aerospace Systems," 2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Miami Beach, FL, 2018, pp. 5294-5299.

[6] E. Fresk and G. Nikolakopoulos, "Full quaternion based attitude control for a quadrotor," 2013 European Control Conference (ECC), Zurich, 2013, pp. 3864-3869.

[7] J. Cariño, H. Abaunza and P. Castillo, "Quadrotor quaternion control," 2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), Denver, CO, 2015, pp. 825-831.

[8] П.А.Жилин. Векторы и тензоры второго ранга в трёхмерном пространстве. Санкт-Петербург, Изд. СПбГТУ, 1992, 86 c.

[9] Картаев Е.А. Преобразования Гиперкомплексных чисел. Издание второе, дополненное - Москва,: СОЛОН-пресс, 2017. – 432 с.

[10] Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование 2002. – Москва, Изд. Физикоматематической литературы, 2002, - 472 с.

[11] Бесекерский В.А, Попов Е.И. Теория автоматического управления. – Изд. 4-е, переработанное, и доп. – Спб. Из-во «Проффессия», 2003, - 752 с.